4.

D. F. G.

EXERCITATIONES MISCELLANEÆ MATHEMATICO-PHYSICÆ,

QUARUM

FASCICULUM SECUNDUM, et ult.

ANNUENTE AMPLISS. CONSESSU PHILOSOPH.
IN REGIA ACADEMIA ABOËNSI,
Publicæ censuræ committunt

AUCTOR
MAG. MARTINUS JOHANNES WALLENIUS,
MATHEM. PROFESS. REG. & ORDIN.

ATQUE

RESPONDENS
MATTHIAS LANDANUS, Pet. Fil.
WIBURGENSIS,

Die VI. Decembr. Anni MDCCLVIII.
L. H. Q. S.

ABOÆ, Impressit DIRECT. & TYPOGR. Reg. Magn. Duc.
Finland. JACOB MERCKELL.

B. L.

Secundum horum Miscellaneorum Fasciculum editaris, in limine statim monendum est, nullá in eodem Physica reperiri argumenta. Cujus rei veniam tanto certius nobis pollicemur, quanto magis persvasum habemus, integrum nobis esse vel Physica vel purè Mathematica vel Physico-Mathematica singulis inserere Fasciculis, dummodo toti opusculo titulus præfixus respondeat. Deinde quod nonnulla strictim indicaverimus, nec minima quæque demonstrationum momenta nedum singula calculi symptomata evolverimus, quædam Lectorum industriæ relinquentes; id brevitatis studio factum, nec Lectori, in Mathematicis mediocriter versato, negotium facessere speramus; quin, si plura paucis complexi sumus, nonnihil eo ipso lucrati nobis videmur. Ast si cui forte videbimur non æquabili tractationis tenore omnia persecuti, sed passim faciliora aut leviora prolixius exposuisse, alia potiora parcius tetigisse, aut si qua præterea in hisce nostris meletematibus festinanter congestis desiderabuntur; de Tuo tamen, candide Lector, favore nulli dubitamus, & quæ ad Fasciculum primum præfati sumus, nunc quoque repetita volumus.

LEMMA.

ADDENDA & CORRIGENDA.

Pag. 5. lin. penult. leg. *&c. de Berlin A.* 1752. *p.* 283. *seqq.* p. 7. l. 21. GD leg. CD. Ibid. l. 22. DE leg. DC. §. 9. l. 4. leg. $\sqrt{\frac{(ac+bd)(ad+bc)}{ab+cd}}$. p. 13. l. 2. dut leg. dat. §. 28. l. 18 EV leg. ET. Ib l. 19. perpendiculare *adde* FN. p. 24. not. (**) dati *adde* acuti. Ibid. *intra*, add. & vertex anguli simul ceciderit in extremitatem diametri AFCX puncto F propiorem. §. 31. l. 3. MT leg. NT. §. 36. l. 5. autem *add.* primarius.

LEMMA.

TRianguli, *lateribus a, b, c comprehensi, area est* $= \frac{1}{4}\sqrt{2a^2b^2+2a^2c^2+2b^2c^2-a^4-b^4-c^4}$ $= \frac{1}{4}\sqrt{(a+b+c)\,(a+b-c)\,(a-b+c)\,(-a+b+c)}$; vid. sis *Newt. Arithm. Univ. p. m.* 106. aliosve passim.

LEMMA. *Fig.* 1.

2. *Radium Circuli KA describendi circa* $\triangle$:lum *ABC, cujus latera data sunt, calculo determinare.* Sint AB$=a$, BC$=b$, CA$=c$, KA$=y$, erit arcus $\frac{1}{2}$BC sinus$=\frac{1}{2}b$, ut & arcuum $\frac{1}{2}$AB, $\frac{1}{2}$AC sinus $\frac{1}{2}a$, $\frac{1}{2}c$, atque eorundem cosinus $\sqrt{yy-\frac{1}{4}aa}$, $\sqrt{yy-\frac{1}{4}cc}$ respective. Jam ob sin. $\frac{1}{2}$BC $=$ sin. $\frac{1}{2}$AB $+$ $\frac{1}{2}$AC; erit (*per El. Trig.*) sin. Tot $\times$ sin. $\frac{1}{2}$BC $=$ sin. $\frac{1}{2}$ AB $\times$ Cos. $\frac{1}{2}$AC $+$ sin. $\frac{1}{2}$AC $\times$ Cos. $\frac{1}{2}$AB, i. e. $\frac{1}{2}by$ $= \frac{1}{2}a\sqrt{yy-\frac{1}{4}cc}+\frac{1}{2}c\sqrt{yy-\frac{1}{4}aa}$; unde convenienti reductione obtinetur $yy = \dfrac{aa\,bb\,cc}{2a^2b^2+2a^2c^2+2b^2c^2-}$

$$\overline{a^4 - b^4 - c^4} = \frac{aa\,bb\,cc}{(a+b+c)(a+b-c)(a-b+c)(-a+b+c)},$$ ideoque $$y = \frac{abc}{\sqrt{(a+b+c)(a+b-c)(a-b+c)(-a+b+c)}}$$ = facto omnium laterum per quadruplam Δ:li aream diviso (§. 1.). Si laterum summa $a+b+c$ dicatur s, erit $$y = \frac{abc}{\sqrt{s(s-2a)(s-2b)(s-2c)}}.$$

Aliter. Demissis ex Circuli centro K in AB AC perpendiculis KG, KH, & junctis GH KA, patet esse AG $= \frac{1}{2}a$, AH $= \frac{1}{2}c$, GH $= \frac{1}{2}b$, GK $= \sqrt{yy - \frac{1}{4}aa}$, KH $= \sqrt{yy - \frac{1}{4}cc}$. At ob angulos KGA, KHA rectos, erit quadrilaterum KGAH circulo inscriptibile ideoque AK $\times$ GH $=$ AG $\times$ KH $+$ AH $\times$ GK i. e. $\frac{1}{2}by = \frac{1}{2}a\sqrt{yy - \frac{1}{4}cc} + \frac{1}{2}c\sqrt{yy - \frac{1}{4}aa}$, &c. ut antea.

3. SCHOL. Formula inventa methodum suppeditat facillimam radium y numeris definiendi. Trigonometrico calculo, verum satis prolixo, id efficere docuit *Generos. Dn. Baro Palmqvist* in libello *Tillämpning af Arithm. Geom. &c.* §. 180. Idem hoc brevius sic perfici posset: cognito prius angulo uno v. g. ACB, cui = est AKG, inferatur: Sin. AKG: Sin. Tot. :: (AG =) $\frac{1}{2}$AB: *AK*.

4. COR. 1. Area Δ:li est = facto omnium laterum per duplam diametrum circuli circumscripti diviso (§. 2.).

5. COR. 2. Sumta b pro basi, sit $\triangle$:li altitudo $= p$, unde quadrupla area $= 2bp$ ideoque (§. 2.) $y = (abc : 2bp =)\ ac : 2p$ & $ac = 2py$. Est itaque diameter quarta proportionalis altitudini & cruribus $\triangle$:li, atque R:glum sub cruribus = R:glo sub diametro Circuli & altitudine $\triangle$:li.

6. COR. 3. Analogia AK : $\frac{1}{2}$BC (i. e. §. 2. $\frac{abc}{\sqrt{s(s-2a)(s-2b)(s-2c)}} :: \frac{1}{2}b$ vel) $\frac{1}{2}ac : \sqrt{\frac{1}{2}s(\frac{1}{2}s - a)}$ $\overline{(\frac{1}{2}s - b)\ (\frac{1}{2}s - c)}$ :: *Sin. Tot.* : *Sin. BAC*, regulam sistit sat commodam inveniendo angulo cuicunque $\triangle$:li ex datis lateribus.

PROBLEMA. *Fig.* 2.

7. *Ex datis quatvor rectis Quadrilaterum Maximum construere.* Sint AB $= a$, BC $= b$, CD $= c$, DA $= d$; quæratur primum diagonalis AC $= x$. Area $\triangle$:li ABC est $= \frac{1}{4}\sqrt{2a^2b^2 + 2a^2x^2 + 2b^2x^2 - a^4 - b^4 - x^4}$, & $\triangle$:li ADC $= \frac{1}{4}\sqrt{2c^2d^2 + 2c^2x^2 + 2d^2x^2 - c^4 - d^4 - x^4}$ (§. 1.) atque in præsenti casu quadrilateri $= \triangle$ ABC $+ \triangle$ ADC fluxio $= 0$, i. e.

$$\frac{(aax + bbx - x^3)\ \dot{x}}{2\sqrt{(2a^2b^2 + 2a^2x^2 + 2b^2x^2 - a^4 - b^4 - x^4)}} + \frac{(ccx + ddx - x^3)\ \dot{x}}{2\sqrt{(2c^2d^2 + 2c^2x^2 + 2d^2x^2 - c^4 - d^4 - x^4)}} = 0.$$

Dividendo per $\frac{1}{2}x\dot{x}$ & trajiciendo terminos, fit $\frac{aa+bb-xx}{\sqrt{(2a^2b^2+2a^2x^2+2b^2x^2-a^4-b^4-x^4)}} = \frac{xx-cc-dd}{\sqrt{(2c^2d^2+2c^2x^2+2d^2x^2-c^4-d^4-x^4)}}$. Quadrando utrumque hujus æquationis membrum, prodit $(a^4+2a^2b^2+b^4-2a^2x^2-2b^2x^2+x^4):(-a^4+2a^2b^2-b^4+2a^2x^2+2b^2x^2-x^4) = (x^4-2c^2x^2-2d^2x^2+c^4+2c^2d^2+d^4):(-x^4+2c^2x^2+2d^2x^2-c^4+2c^2d^2-d^4)$. Ad calculum abbreviandum notasse juvat: Si adjiciatur numeratori prioris membri $-4aabb$, posterioris vero $-4c^2d^2$, fractiones adhuc fore æquales, utramque nimirum $=-1$. Unde sequitur, servatis denominatoribus, fractiones, quarum numeratores sint $-4a^2b^2$ & $-4c^2d^2$, pariter æquales esse, adeoque etiam $aabb : a^4-2a^2b^2+b^4-2a^2x^2-2b^2x^2+x^4 :: ccdd : x^4-2c^2x^2-2d^2x^2+c^4-2c^2d^2+d^4$. Æquando jam facta extremorum & intermediorum atque rejiciendo omnes terminos ad eandem æquationis partem, prodit

$$\begin{matrix} aabb.x^4 & -2a^2b^2.(cc+dd)\,xx & +a^2b^2.(c^4+d^4) \\ -ccdd & +2ccdd.(aa+bb) & -c^2d^2.(a^4+b^4) \end{matrix} = 0,$$

Hæc æquatio resolvitur in factores: $abx^2+cdx^2-abc^2-abd^2-a^2cd-b^2cd=0$, & $abx^2-cdx^2-abc^2-abd^2+a^2cd+b^2cd=0$; quæ æquationes etiam obtinentur, biquadraticam illam instar quadraticæ tractando, ut fiat $(aabb-ccdd.)\,xx = aabb.(cc+dd)-ccdd.(aa+bb) \pm abcd.(aa+bb$

$-cc$

$-cc-dd)$; ac dein, servato pro $\pm$ signo $+$, dividendo per $ab-cd$; vel $-$, per $ab+cd$. Ex priori harum æquationum (posterior enim ad casum præsentem non spectat) deducitur $xx = \frac{abc^2 + abd^2}{ab}$ $\frac{+ a^2cd + b^2cd}{+ cd} = \frac{(ac+bd)(ad+bc)}{ab+cd}$, unde $x = \sqrt{\frac{(ac+bd)(ad+bc)}{ab+cd}}$. Q. E. I.

Sicut vero diagonalis AC, latera a & b vel c & d subtendens, jam inventus est $= \sqrt{\left(\frac{(ac+bd)(ad+bc)}{ab+cd}\right)}$; sic quoque, substitutis modo aliis denominationibus, diagonalis BD, subtendens latera a & d vel b & c, evadit $= \sqrt{\frac{(ab+cd)(ac+bd)}{ad+bc}}$; quare AC $\times$ BD $= (\sqrt{(ac+bd)^2} =)\ ac+bd =$ AB $\times$ CD $+$ BC $\times$ AD; quæ cum sit proprietas Quadrilateri circulo inscripti, *circa Quadrilaterum Maximum semper Circulus describi poterit.*

Hæc propositio (quæ de quolibet *Polygono maximo*, datis lateribus comprehenso, non minus valet) aliunde jam nota (vid. *Act. Stockh. A.* 1741. *p.* 136. & *A.* 1742. *p.* 141. *seqq. Histoire de l' Acad. Roy. des Sciences &c. A.* 1752.) aliam multo concinniorem suppeditat præsentis problematis analy-

 sin

sin nunc quoque adferendam. Placuit tamen nec priorem illam, a dicta propositione independentem, omittere. En itaque.

Solutio 2. Servatis iisdem denominationibus, sit porro $AE = z$, unde $EC = x - z$. Ob $\triangle AED \backsim BEC$ & $AEB \backsim DEC$ erit 1° $d : b :: DE : x - z$ & 2° $a : c :: z : DE$, quare $ad : bc :: z : x - z$, unde $z = adx : (ad + bc)$ & $x - z = bcx : (ad + bc) = EC$. Igitur pro z substituendo $adx : (ad + bc)$, fit $DE =$ (per analogiam 2, $\overline{cz : a} =$) $cdx : \overline{(ad + bc)}$. Porro $c : a ::$ EC ($bcx : \overline{ad + bc}$): $BE = abx : \overline{ad + bc}$, ideoque $BE + ED$ seu $BD = (ab + cd)\, x : (ad + bc)$ Ast, per propr. quadrilateri circulo inscripti, $AC \times BD = AB \times CD + AD \times BC$ i. e. $(ab + cd)\, xx : (ad + bc) = ac + bd$, indeque denuo $x = \sqrt{\dfrac{(\overline{ac + bd}.\, \overline{ad + bc})}{ab + cd}}$. Quadrilateri autem

Constructio Geometrica ad constructionem hujus æquationis, seu determinationem diagonalis AC redit, sequenti ratione absolvendam: Fiat $a : c :: d : m$, $a : b :: d : n :: c : p$; porro $b + m : c + n :: d + p : q$. Denique inter a & q quæratur media proportionalis, quæ erit $=$ diagonali x. Nam ob $m = cd : a$, $n = \overline{bd : a}$, $p = bc : a$, est $\overline{b + m} = \overline{ab + cd} : a$, $c + n = \overline{ac + bd} : a$, $\overline{d + p} = \overline{ad + bc} : a$; quare $q = \left(\dfrac{\overline{c + n}.\, \overline{d + p}}{b + m} = \right) \dfrac{\overline{ac + bd}.\, \overline{ad + bc}}{a\ (ab + cd)}$, ideoque $aq = \dfrac{\overline{ac + bd}.\, \overline{ad + bc}}{ab + cd} = xx$, consequenter $x = \sqrt{aq}$. Si

fuerit

fuerit BC=CD seu $b=c$, x evadit $=\sqrt{ad+bb}$; quare fiat $b:d::a:r$ atque inter b & $b+r$ quæratur media proportionalis, erit hæc=AC=x. Vel sumta inter a, d media proportionalis jungatur ipsi b ad angulos rectos, & erit hypothenusa=AC.

Solutio 3. Producta intelligantur latera BA CD ut in O sibi occurrant, id quod semper continget si AD<BC (*). Ponatur AO=v; ob $\triangle$OAD $\sim$ OCB erit $b:d::a+v:$ OD :: OD $+c:v$, ideoque OD $=(ad+dv):b=(bv-cd):d$, unde deducitur $v=(ad+bc)d:(bb-dd)=AO=$ quartæ proportionali ipsis $b-dd:b$, $c+ad:b$ & d. Data sic AO, fiat porro BC : AD : : BO : *OD* (vel AD : BC : : AO : *OC*.) Inventis hoc modo OA, OD & data insuper AD, habetur punctum quæsitum D; vel per inventas BO, OC & datam BC, punctum C.

Alia adhuc *Constructio* deducitur ex analysi illa admodum facili & concinna hanc in rem adhibita a *Cancellariæ Reg. Consiliario Generos. Dn. Klingenstierna* (*Act. Stockh. A. 1743. p. 255.*) Producta nempe AB, fiat GD : DA : : CB : *BF*; porro DC + CB : CB : : AF : *FP* atque DE—CB : CB : : AF : *FQ*. Bissecta

---

(*) Nisi fuerint omnia latera æqualia (quo autem in casu figura erit quadratum datum,) poterunt bina latera inæqualia, si ita visum fuerit, sibi invicem opponi, eoque ipso hypothesi (quod sit AD < BC) satisfieri. Et in præsenti quidem negotio perinde est, quocunque ordine latera disponantur (*cfr. sis Act. Stockh. A.* 1742. *p.* 142.)

cta jam PQ in R, centro R radio RP describe circulum, ut & centro B radio $=$ BC alium, qui priorem secabit in puncto quæsito C (**). Si fuerit BC $=$ CD, ex constructione allata æque ac ipsa analysi patet, facta BF $=$ AD, bissecandam esse AF in P, unde erigatur perpendiculum, quod secabit circulum centro B radio $=$ BC descriptum in C.

Specialem Solutionem aliam addimus pro eodem hoc casu, ubi (Fig. I.) duo latera AB, DC æqualia sunt. De majori BC laterum inæqualium auferatur minus AD, ut sit BE $=$ AD; bisseca EC perpendiculo LD, quod occurret circulo, centro C radio CD describendo, in puncto D. Veritas constructionis perspicitur ex eo, quod, ceu facile probatur, quadrilateri circulo inscripti & duo latera opposita æqualia habentis, reliqua bina latera sint parallela.

Cum in praxi varia constructiones Geometricæ, inprimis operosiores, ægre vel plane non adhiberi queant; proinde si e. g. in campo designandum sit Quadrilaterum nostrum, ductu æquationis AC $= \sqrt{\frac{(ac+bd)(ad+bc)}{ab+cd}}$ numeris exprimatur diagonalis AC, quo cognito & reliquis lateribus

(**) Eruendo ex hac constructione valorem diagonalis AC superius invento congruentem, solutionis hujus cum prima nostra consensum, experimento quasi facto, comprobavi.

ribus △△:lorum ABC, ADC insuper datis, funium vel perticarum ope determinabuntur puncta C, D. Et quidem si latera *a b c d* in numeris majoribus dantur; in inveniendo per calculum AC (sive is per logarithmos instituatur sive minus) juvabit istius æquationis formæ non adeo strictè inhærere; quin, substitutis in linearum locum numeris, viam ingrediamur superius in Constr. I:ma indicatam.

PROBLEMA. *Fig.* 2.

8. *Invenire Radium y Circuli, cui Quadrilaterum data habiturum latera a, b, c, d, inscribi possit.* Radius hic idem est, qui radius circuli describendi circa △ ABC, cujus latera sunt AB $= a$, BC $= b$ & AC $=$ (§. 7.) $\sqrt{\frac{(ac+bd)(ad+bc)}{ab+cd}}$, prodituros substituendo $\frac{(ac+bd)(ad+bc)}{ab+cd}$ pro cc in æquatione §. 2. allata. Sic vero reperitur $yy =$ fractioni, cujus numerator $= aabb\,(ab+cd)\,(ac+bd)\,(ad+bc)$, denominator vero $= aabb \times (-a^4-b^4-c^4-d^4+2a^2b^2+2a^2c^2+2a^2d^2+8abcd+2b^2c^2+2b^2d^2+2c^2d^2) =$ (facta ejus resolutione in factores simplicissimos s. unius dimensionis,) $aabb\,(a+b+c-d)\,(a+b-c+d)\,(a-b+c+d)\,(-a+b+c+d)$. Itaque dividendo tam numeratorem quam denominatorem per $a\,a\,b\,b$, & extrahendo radices, evadit

$$y = \sqrt{\frac{(ab+cd)\,(ac+bd)}{(a+b+c-d)\,(a+b-c+d)\,(a-b+c+d)}}$$

 $(ad+$

$\frac{(ad+bc)}{(-a+b+c+d)}$, quam ipsam formulam, suppressa analysi, dederat Summus Geometra Generos. Dn. *Klingenstjerna* in *Act. Stockh.* 1742. p. 144. Posita laterum summa $a+b+c+d=s$, erit $y=\sqrt{\frac{(ab+cd)}{(s-2a)}}$ $\frac{(ac+bd)(ad+bc)}{(s-2b)(s-2c)(s-2d)}$: (cfr. §. 10.) Si in his æquationibus ponatur $d=0$, ut figura in Δ:lum abeat, mutantur illæ in easdem, quæ §. 2. inventæ sunt.

Posset etiam Quadrilaterum maximum ope hujus problematis construi, quærendo prius geometrice y, atque hoc radio circulum describendo, in quo aptentur latera data. Præstat vero constructiones §. 7. datas adhibere.

PROBLEMA. *Fig.* 2.

9. *Spatium maximum, quod datis quatvor rectis a, b, c, d, comprehendi queat, seu aream Quadrilateri Maximi, ex illis construendi, definire.* Per §. 1. area Δ:li *ABC*, cujus latera sunt a, b & $\frac{\sqrt{(ac+bd)}}{ab}$ $\frac{(ad+bc)}{+cd}$ (§. 7.), erit $=\frac{1}{4}\sqrt{[-a^4-b^4+2a^2b^2-}$ $\frac{(ac+bd)^2(ad+bc)^2}{(ab+cd)^2}+(2a^2+2bb)\times\frac{(ac+bd)(ad+bc)]}{ab+cd}$ $=\frac{ab\sqrt{(s-2a)(s-2b)(s-2c)(s-2d)}}{4(ab+cd)}$; & similiter Δ:li

ACD,

ACD, lateribus c, d, $\sqrt{\frac{(ac+bd)(ad+bc)}{ab+cd}}$ comprehensi, area $= \frac{cd\sqrt{(s-2a)(s-2b)(s-2c)(s-2d)}}{4(ab+cd)}$;
Ergo Δ ABC $+$ Δ ACD seu integra Quadrilateri maximi area est $= \frac{1}{4}\sqrt{(s-2a)(s-2b)(s-2c)(s-2d)}$
$= \sqrt{(\frac{1}{2}s-a)(\frac{1}{2}s-b)(\frac{1}{2}s-c)(\frac{1}{2}s-d)}$.

10. Schol. Est itaque (§§. 8. 9.) radius circuli circumscripti $= a\sqrt{\left(\frac{a.\,b+cd.\,c+bd.\,d+bc}{a\quad\;\, a\quad\;\, a}\right)}$ per quadruplam quadrilateri aream diviso. Positis lateribus 3, 7, 9, 11; area est $= 48$ & radius circuli circumscripti quam proxime $= 5,7$. Sint vero e. g.

latera	484′	1848′	Log. 1364	$=$ 3. 1348144
	825	subtr. 484	L. 1023	$=$ 3. 0098756
	1287	825	L. 561	$=$ 2. 7489629
	1100	1287	L. 748	$=$ 2. 8739016
$s =$	3696	1100		11. 7675545
$\frac{1}{2}s =$	1848	residua 1364		
		1023	Log. Areæ	$=$ 5. 8837772
		561		
		748	Area	$=$ 765204′ □ exactè.

Radius autem circuli reperitur $=$ 687′,5 exactè.

PROBLEMA. *Fig.* 2.

11. *Pentagonum ABCLD Maximum, seu tale, circa quod Circulus describi queat, ex datis lateribus construe-*

construere. Sint $AB = a$, $BC = b$, $CL = c$, $DL = d$, $DA = f$, radius circuli $= y$, quærimus $AC = x$. Habemus jam (per §. 2.) pro $\triangle$ ABC, $yy = \dfrac{aa\,bb\,xx}{-x^4 + 2a^2x^2 + 2b^2x^2 - a^4 - b^4 + 2a^2b^2}$ & (per §. 8.) pro quadrilatero ACLD, $yy = \dfrac{(cx + df)}{(x + c + d - f)}$

$$\frac{(dx + cf)\,(fx + cd)}{(x + c - d + f)\,(x - c + d + f)\,(-x + c + d + f)}.$$

Binos hos valores æquales ponendo, calculo rite subducto, sequens emergit æquatio:

$$cdfx^7 + (c^2d^2 + c^2ff + d^2ff - a^2b^2)\,x^6 + (c^2 + d^2 + ff - 2a^2 - 2b^2)\,cdf.\,x^5 \left.\begin{matrix} -2.(aa+bb)(c^2d^2 + c^2ff + d^2ff) \\ +2aabb\,(c^2 + d^2 + ff) + c^2d^2ff \end{matrix}\right\} x^4 + \left.\begin{matrix} (aa+bb)^2 - 2(aa+bb) \\ +2a^2b^2 \qquad (c^2 + d^2 + ff) \end{matrix}\right\} cdfx^3 \left.\begin{matrix} +(a^4 + b^4)\,(c^2d^2 + c^2ff + d^2ff) \\ -a^2b^2\,(c^4 + d^4 + f^4) - 2c^2d^2ff\,(a^2 + b^2) \end{matrix}\right\} xx + (aa - bb)^2\,(c^2 + d^2 + ff)\,cdf.\,x + (aa - bb)^2\,c^2d^2ff = 0,$$

cujus resolutio dabit *AC*; quo cognito datur $\triangle$ ABC, & circulus circa idem describendus &c. Eadem hæc obtinetur æquatio alio modo. Nam in quadrilatero AL est (§. 7.) $CD = \sqrt{\dfrac{(cf + dx)\,(df + cx)}{cd + fx}}$, quo valore & reliquis lateribus a, b, f quadrilateri BD, denuo (*per §. cit.*) exprimatur diagonalis AC, hæcque ipsius denominatio ponatur $= x$. Si fuerit $a = b$, æquatio ista in aliam quinti gradus mutatur. Si $a = b = c = d = f$, eadem talis evadit: $x^5 + 2ax^4 - a^2x^3 - 5a^3x^2 - 4a^4x - a^5$

$-a^5=0$ resolubilis in factores $(x+a)^3=0$ & $xx - ax - aa = 0$, quorum hic dut $\div\!\div x, a, x-a$, ut oportuit (*Eucl. XIII. 8.*) Facto $f=0$, æquatio x^7 &c. in illam biquadraticam, superius (§. 7.) inventam, transformatur.

12. Schol. Si quæratur *Hexagonum maximum*, cujus dantur latera a, b, c, d, f, g; esto z diagonalis, illud in duo quadrilatera secans, quorum latera sint a, b, c, z atque d, f, g, z; y radius circuli circumscribendi. Ex §. 8. jam desumantur duo ipsius yy valores (unum quidem ingredientibus a, b, c, z, alterum d, f, g, z), quos comparando obtineri, sed prolixo calculo, potest æquatio septimi itidem gradus. Hujus supposita resolutione sicque invento z, construatur, ex lateribus jam datis, alterutrum istorum quadrilaterorum, & in circulo circa idem describendo aptentur reliqua tria Hexagoni latera.

LEMMA. *Fig. 3.*

13. *Arcu AB vel angulo ACB utcunque diviso per rectam CT; invenire relationem inter Tangentes totius AD & partium AT, BH.* Dicatur radius CA $=a$, AD $=T$, AT $=t$, BH $=\tau$; & esto TQ normalis ad CD. Ob $\triangle$ CAD $\backsim$ TQD & $\triangle$ CBH $\backsim$ CQT, est $a : T :: TQ : DQ$ & $a : \tau :: CQ : TQ$, quare $a^2 : T\tau :: CQ : DQ$ atque $a^2 + T\tau : T\tau :: CD : DQ$; hinc, quia $T : CD :: DQ : DT$, fit $CD^2 \times \tau = (aa+T\tau) \times DT$ i. e. $(a^2+T^2)\,\tau = (a^2+T\tau)(T-t)$, unde

$aaT = aa\,(t+\tau) + Tt\tau$. Datis itaque T & t, invenitur $\tau = aa\,(T-t):(aa+Tt)$; datis vero partium tangentibus t, τ; totius tangens $T = aa\,(t+\tau):(aa-t\tau)$. Si autem fuerit angulus ACB obtusus, erit T negativus, unde $\tau = aa\,(T+t):(Tt-aa)$. Idem hoc docebit figura, si huic casui aptetur.

14. Cor. Si $t=\tau$, vel t fuerit tangens arcus simpli & T dupli, fit $T = 2a^2 t:(aa-tt)$, & $t = a\,(\sqrt{aa+TT} \mp a):T$, i. e. AD : AC :: DB : AT vel BH; quod posterius ex ipsa figura oppido patet.

PROBLEMA. *Fig. 3.*

15. *Angulum datum ACB vel arcum AB sic dividere, ut si partium AE EB tangentes AT BH dicantur x, t respective;* $t^m x^n$ *sit Maximum vel Minimum.* Dic CA $=a$, AD $=b$, ang. dati cotang. $=k$, cot. ACE $=z$, cot. BCE $=q$, ang. ACE $=v$, BCE $=u$. Si ACB *acutus* fuerit; fluentibus v & u, poterit x (vel t) in infinitum minui usque dum evanescat; at interea t (vel x) non augetur in infinitum nec unquam fit $> b$. Cum itaque eo ipso $t^m x^n$ versus utramque partem minui possit in ∞, dari in hoc casu aliquod $t^m x^n$ *maximum* necesse est. Si ex adverso ACB *obtusus* sit, v (vel u) semper propius ad rectum accedere potest adeoque x (vel t) sine fine crescere; neque tamen interea t (vel x) ultra certum terminum decrescere aut unquam fieri $< k$. Quia igitur $t^m x^n$ utrinque augeri potest

in

in ∞, dabitur in hoc casu aliquod $t^m x^n$ *minimum*. Evicta sic hypotheseos veritate, ad rem ipsam propius accedamus. Ob angulum ACB constantem, (sit vero idem *acutus*,) æquales sunt angulorum ACT, BCT fluxiones viz. $a^2dx:(a^2+x^2) = -a^2dt:(a^2+t^2)$, unde $-dt=(a^2+t^2)dx:(a^2+x^2)$. At quando $t^m x^n$ est *maximum*, erit $mxdt+ntdx=0$ seu $-dt \overset{(I)}{=} \frac{ntdx}{mx}$. Ergo $\frac{aa+tt}{aa+xx} \overset{(II)}{=} \frac{nt}{mx}$, unde $m:n::\frac{t}{aa+tt}:\frac{x}{aa+xx}::\frac{\text{tang.}\,u}{(\text{sec.}\,u)^2}:\frac{\text{tang.}\,v}{(\text{sec.}\,v)^2}::\text{tang.}\,u \times (\text{cos.}\,u)^2:\text{tang.}\,v\times(\text{cos.}\,v)^2::\text{sin.}\,u\times\text{cos.}\,u:\text{sin.}\,v\times\text{cos.}\,v::\text{sin.}\,2u:\text{sin.}\,2v$, item $::\frac{1}{t+q}:\frac{1}{x+z}$ vel $::\triangle$ *ELC*: $\triangle$ *EMC* (ubi EL, EM sunt ad CB, CA normales.)

Constructio. Fac ang. BCS=BCA, CS=CA, produc AC ad R ut sit $n:m::AC:CR$; junge RS, cui parallelam age CV; biseca ang. ACV recta CT, hæc ang. ACB desiderato modo dividet. Nam ob ang. ACS=2ACB & ACV=2ACE (*constr.*) erit quoque VCS=2BCE. In $\triangle$ CRS autem est *sin.* CSR: *sin.* CRS vel ob parallelas CV, RS, *sin.* VCS: *sin.* ACV i. e. *sin.* 2*BCE*: *sin.* 2*ACE* :: CR : CS vel CA :: $m:n$, *q. e. f.* Vel junctam AS seca in G in ratione data $m:n$, ut sit SG : GA :: $m:n$, duc CGV & angulum ACV biseca ut ante. Si enim in CV ducta intelligantur perpendicula *Sf Ag* (quæ tamen in schemate non apparent,) sinus viz. angulorum VCS, ACV;

ex

ex similitudine $\Delta\Delta$:lorum S*f*G, A*g*G sequitur esse S*f* : A*g* :: (SG : GA ::) $m : n$.

Solutio 2. Per §. 13. est semper $a^2b = a^2(t+x) + btx$ & sumendo fluxiones, $a^2dt + a^2dx + btdx + bxdt = 0$, quæ æquatio, pro dt ponendo (I) $-ntdx : mx$ & dividendo per dx, mutatur in $ma^2x + mbtx - nbtx - na^2t \overset{(III)}{=} 0$, unde $maax : (na^2 + nbx - mbx) = (t = §. 13.)\ aa(b-x) : (aa+bx)$. Hinc deducitur $xx + \left(\frac{ma^2 + mb^2 + na^2 - nb^2}{nb}\right)x = aa$ vel, ob $\frac{aa}{b} = k$, $xx + \left(\frac{m}{n}(b+k) + k - b\right)x \overset{(IV)}{=} aa$.

Hæ æquationes etiam sic obtinentur: Ex æq. (II) fit $ma^2x + mt^2x - na^2t - ntx^2 = 0$, ex qua subtrahendo æq. (III) ac dividendo per tx, fit $nb - mb - nx + mt \overset{(V)}{=} 0$, ubi pro t substituatur ejus valor $aa(b-x) : (aa+bx)$ (§. 13.) &c.

Constructio. Fiat $n : m$: CD : *CN*; erige super DN perpendiculum NF, quod occurrat ipsi DA productæ in F; biseca FD in O & fac OT = OC; junge CT; dico problemati esse satisfactum. Nam (concipiatur si placet CY normalis ad CD ut sit $AY = k$,) $n : m$ :: DC : CN :: DY $(b+k)$: $YF = m(b+k) : n$, quare $2AO =$ (*per constr.* AY + YF − AD =) $m(b+k) : n + k - b$. Si itaque *AO* dicatur p, æquatio (IV) hanc induet formam: $xx \pm 2px = aa$ (potest nimirum p esse vel positiva vel negativa vel $= 0$, prout fuerit $a\sqrt{(n+m) : (n-m)} >, <, = b$, &

$= b$, & tunc O cadit vel inter A F vel inter A D vel in A,) unde $x = \sqrt{(aa + pp)} \mp p$. Est vero (*constr.*) OC vel OT $= \sqrt{(aa + pp)}$; ergo AT $=$ OT $\mp$ AO $= \sqrt{(aa + pp)} \mp p = x$.

16. COR. 1. Si $a : b :: \sqrt{(n - m)} : \sqrt{(n + m)}$, erit (ob $p = 0$) $x = a$ seu AT $=$ AC & ACT $= 45°$. Si $b = a$ vel ang. ACB $= 45°$, fiet $x = a(\sqrt{mm + nn} - m) : n$.

17. COR. 2. Si $m = n$, fit (IV) $xx + 2kx$ seu $x^2 + 2a^2 x : b = aa$, ideoque $x = a(\sqrt{a^2 + b^2} - a) : b$, quare (§. 14.) ang. datus ACB bisecandus est. Idem ex analogia $m : n ::$ sin. $2\,u$: sin. $2\,v$, ut & ex æq. (V) oppido sequitur; nec difficulter ex constructionibus generalibus; & in I:ma quidem jam coincidunt CV, CB, &c. In altera vero (ob $n = m$ ideoque DY $=$ YF) O cadit in Y, ut sit YC $=$ YT, quare ang. YCT $=$ (YTC $=$) D $+$ DCT. At ACY $=$ (complemento ipsius ACD ad rectum $=$) D; Ergo reliquus ACT $=$ DCT.

18. COR. 3. Posito ang. ACB *recto*; ob $b = \infty$, adeo ut datæ quantitates ejus respectu evanescant, fiet e. g. ex æq. (IV) $x = b(n - m) : n$; quare si $n >, < m$, est $x = \pm \infty$ nec proinde datur ullum $t^m x^n$ *maximum* aut *minimum*. Si vero $n = m$, est $nx : (n - m)$ seu $nx : 0 = b = \infty$, ideoque x finita quidem sed *indeterminata* s. pro arbitrio sumenda, adeo ut $t^m x^n$ s. jam $t^n x^n$ sit *constans*. Hæc quo-

que ex solutione generali deducere visum est, alioquin evidentius sic probanda: quando ACB rectus est, sunt t & x unius ejusdemque arcus tangens & cotangens. Hinc ob $t = aa : x$, erit $t^m x^n = a^{2m} x^{n-m}$ sicque crescente x vel crescet vel decrescet, prout fuerit n vel $>$ vel $< m$. Et si $m = n$, ob $tx = aa$, fiet $t^m x^n = a^{2n}$ constanti.

19. Cor. 4. Ob $t = aa : q$ & $x = aa : z$ ideoque $t^m x^n = a^{2m+2n} : q^m z^n$; quando $t^m x^n$ est *maximum*, erit $q^m z^n$ *minimum* & contra. Per easdem itaque constructiones determinatur productum *maximum* sub dignitatibus *tangentium* atque *minimum* sub iisdem potentiis *cotangentium*, aut vicissim.

20. Cor. 5. Oporteat dicta ratione (§. 15.) secare ang. *obtusum* ACN. Invento ut prius (*construct.* 2.) puncto O, haud aliter ac si secandus esset ang. deinceps positus acutus ACB, fac $OP =$ OC & junge CP; dico CP ita dividere angulum ACN ut (tang. ACP)^n $\times$ (tang. PCN)^m sit (non maximum, quod in hoc casu nullum datur, sed) *minimum*. Nam ob OP = OC = OT, est ang. PCT rectus; ideoque ACP = 90° — ACT & PCN = 90° — DCT. Ergo tang. ACP = cot. ACT & tang. PCN = cot. DCT. At (*constr.* & §§. 15. 19.) (cot. ACT)^n $\times$ (cot. DCT)^m est *minimum*. Ergo &c.

21. Cor. 6. Manente ang. ACB, quantitates angulorum partialium a ratione $m : n$ unice dependent. Horum quilibet eo major est vel minor, quo,

quo, cæteris paribus, major vel minor fuerit exponens dignitatis tangenti ipsius respondentis. Et hoc quidem de ang. ACB *acuto* valet; in *obtuso* (§. 20.) contrarium obtinet. Sequuntur hæc ex analogia (§. 15.) $m : n :: \text{sin. } 2u : \text{sin. } 2v$, æquè ac constructionibus & æq. (V) per quam $m : n :: b-x : b-t$; estque inde porro $m : n-m :: b-x : x-t$, &c.

22. Schol. 1. Analysis *Solut. 1.* (§. 15.) ut & §. *præc.* varia continent Theoremata, quæ in totidem Problemata facile convertuntur, eadem opera, qua præsens nostrum, solvenda, uti sunt: *angulum datum ACB ita secare, ut differentiæ inter tangentes totius & partium, vel summæ tangentis & cotangentis singularum partium, vel △△ EMC, ELC, &c. sint in ratione data.* Cæterum quod sit, in hypoth. $t^m x^n$ *maximi*, $m : n :: \text{sin. } 2u : \text{sin. } 2v$ (unde constructionem priorem elicuimus, problemate proposito sic quidem ad aliud magis simplex reducto,) etiam hoc modo evincitur: fiat HK normalis ad CA & productæ concipiantur CA, BH usque ad occursum in puncto, quod dicatur W; quare BW = AD & ang. W = D. Jam (§. 21.) $m : n = b-x : b-t =$ DT : WH = (ob △ DQT ∽ WKH,) TQ : HK =

$$(\text{sin. } u : \text{sin. } v) + (CT : CH) = \frac{\text{sin. } u}{CH} : \frac{\text{sin. } v}{CT} =$$

$$\frac{\text{sin. } u}{\text{sec. } u} : \frac{\text{sin. } v}{\text{sec. } v} = \text{sin. } u \times \text{cos. } u : \text{sin. } v \times \text{cos. } v$$

$$= \text{sin. } 2u : \text{sin. } 2v.$$

23. Schol. 2. Lubet etiam utriusque constru-

 ctionis

ctionis (§. 15.) consensum ratiocinio Geometrico probare. Si fiat *CN* : CD :: *m* : *n*, NF perpendicularis ad DN occurrens in F productæ DA normali ad CA; bisecta DF in O, facta denique $OT = OC$, *CT* desiderato modo secabit angulum datum ACB (*constr.* 2.). Facta vero $AP = AD$ ut fiat $ACP = ACD$; ducta NP & huic parallela CZ; recta bisecans angulum ZCD, in partes quæsitas dividet angulum ACB (*vi constr.* 1:mæ). Si igitur probari potest esse ang. $ZCD = 2 ACT$, consensus harum constructionum patet. Id autem sic probo: Ob ang. DNF rectum & $OD = OF$ (*constr.* 2,) est $OD = ON$. At (*constr.* 1.) $CP = CD$. Ergo ang. $ONC = (D =) OPC$; quare puncta COPN sunt in peripheria circuli ideoque ang. $PNO = PCO$; consequenter $PCO + D = (PNO + OND = PND =$ ob parallelas NP, CZ, *constr.* 1.) ZCD, & communi ZCO demto (vel addito si Z inter O, A ceciderit,) $PCZ + D = OCD = $ (ob $OT = OC$ ideoque $OCT = OTC = TCD + D$,) $2 TCD + D$. Ergo $PCZ = 2 TCD$, quibus ablatis ab æqualibus $PCD = 2 ACD$, erit $ZCD = 2 ACT$. *q. e. d.*

24. COR. 7. Restat solutio problematis nostri aliorumque huic affinium (§. 22.) calculo expedienda. Ob (§. 15.) $n : m :: AG : GS$ & $AI = \frac{1}{2} AS$, erit $n + m : n - m :: AI : IG ::$ tang. ACB : tang. BCV. At ob $VCE = ACE$, est $BCV = ACE - ECB$. Inferatur itaque: *ut* $n + m$ *ad* $n - m$ *sic tang. anguli dati ad tangentem differentiæ partium ejus incognitarum.* Hac diffe-

differentia sic inventa, ob datam quoque earum summam s. angulum ACB, singularum partium inventio in promtu est. Eadem hæc regula ex Δ:li CRS (*coll. Solut.* 1. §. 15) secundum vulgatissima Trig. Planæ principia, resolutione sponte fluit. Æquatio (IV) vero, valorem ipsius x exprimens, operosiorem suppeditat calculum, præterquam in casibus quibusdam simplicioribus; e. g. si ACB = 60°, $m = 1$, $n = 2$; erunt partes quæsitæ 45° & 15°. Si ACB = 45°, $m = 3$, $n = 4$, erit $x = \frac{1}{2}a$, $t = \frac{1}{3}a$. *Confer.* §§. 16. 21.

PROBLEMA. *Fig.* 4.

25. *Anguli dati KNZ, cujus crus unum NK semper tangat Curvam datam FL, vertex incedat in alia data Curva ANR; quæritur Curva MQ, quam, durante hoc motu, perpetuò tangat alterum anguli crus NZ.* Ducta nempe utcunque recta KN tangente curvam LF in F & occurrente alteri AR in N, atque constituto ang. KNZ = dato; determinandum est in recta NZ positione data punctum contactus Q; quod haberi debet pro intersectione rectarum NZ, *nz*, postquam ang. KNZ situm priori infinite vicinum *knz* obtinuit. Similiter intersectio rectarum KN *kn* coincidere censenda est puncto F. Ducantur DT tangens curvam AR in dato puncto N, atque FD, DG normales ad DT, NZ. Curvæ elementum N*n* considerari debet ut particula tangentis ET; & ob ang. FNQ = F*n*Q, est ang.

$HFn = VQn$. Si jam descripti concipiantur centris F, Q arcus infinite parvi nH, nV; ob $\triangle FDN \backsim nHN$, erit $FN : FD :: nN : nH$; ob Sect. $FnH \backsim QnV$, $Fn : nQ$ vel $FN : NQ :: nH : nV$; atque ob $\triangle GND \backsim VNn$, $DG : DN :: nV : nN$. Ex his sequitur esse $FN^2 . DG = FD . DN . NQ$ vel $NQ = \frac{DG . FN^2}{FD . DN}$; Unde hæc fluit *Constructio:* Sume rectis FD FN tertiam proportionalem, quam voco ψ; & porro ipsis DN, DG, ψ quartam proportionalem *NQ*; erit *Q* punctum in curva quæsita.

Constructio 2. Ob ang. $FNQ = FnQ$, erunt puncta $FnNQ$ in peripheria circuli, cujus elementum est Nn ideoque tangens ET; quare (*Eucl. III. 32.*) ang. $Q = FNE$ & ang. $NFQ = TNZ$. Fiat igitur ang. $NFQ = TNZ$, quo facto recta FQ occursu suo determinabit in NZ positione data punctum quæsitum Q. Constructionem hanc omnium facillimam analysi simplicissima elicitam, etiam ex analysi priori deducere licet. Per illam enim obtinuimus $NQ = \frac{DG . FN^2}{FD . DN}$ vel $\frac{FD}{FN} : \frac{DG}{DN} :: FN : NQ$, h. e. *sin.* FND : (sin. $DNG =$) *sin.* TNZ :: ($FN : NQ$ ::) *sin.* Q : *sin.* NFQ. Hinc, quia simul $FND + TNZ = (180° - FNQ =) Q + NFQ$; erit utique $FND = Q$ & $TNZ = NFQ$.

26. Cor. 1. Quando curvæ datæ Algebraicæ sunt, patet quæsitam quoque fore *Algebraicam*; sin alterutra Transcendens fuerit, *Transcendentem*.

27. Cor. 2. Facto ang. NFE = TNZ; ob Δ EFN $\backsim$ NFQ, erit $\div$ FE, FN, *FQ*.

28. Cor. 3. Quia $NQ = \frac{DG.\ FN^2}{FD.\ DN}$ (§. 25.) sequitur 1:mo Si *DG* est negativa h. e. cadit ad partem oppositam tangentis ET respectu puncti F; fore etiam *NQ* negativam i. e. sumendam non in crure NZ anguli dati KNZ, sed in eodem producto versus Z'; scil. NZ *nz* tunc *divergunt* versus Z, convergunt versus Z'; Vel quod eodem recidit: si ang. dati crura NK, NZ cadunt ad eandem partem tangentis ET; Q situm erit in crure NZ; sin ad diversas, in eodem continuto versus Z'. Nimirum 2:do perinde est sive ang. KNZ sive deinceps positus KNZ' super datis curvis dicta lege moveatur. In utroque enim casu unius ejusdemque curvæ MQ partes solum diversæ generantur per intersectiones innumeras & infinite vicinas rectæ ZZ'; quia duæ rectæ positione datæ non nisi in unico puncto se secant. 3:tio Si autem *DG* = 0, h. e. crus NZ coincidit tangenti ET (non autem ipsi sit perpendiculare, quo in casu etiam DN foret = 0,) erit *NQ* = 0, seu Q cadet in N, quod fit punctum curvis AR, MQ commune & in quo *se mutuo tangunt*; quum sit tunc NZ tangens utrique communis. 4:to Quando FD = 0 seu FN tangit AR, fit *NQ* = ∞, adeoque NZ *asymptotos* curvæ MQ. Idem patet ex *Constr.* 2. (§. 25.): in hoc enim casu KNZ + ZNT ideoque etiam KNZ + NFQ = 2 rectis,

quare

quare NZ FQ parallelæ ſunt, & Q infinito intervallo ab N vel F diſtat. Similiter ex §. 27, ob FE jam $=0$, fit FQ $=\infty$. Hinc 5:to ſi curvæ datæ, ſaltem in ſe redeuntes, convexitates ſibi mutuo obvertant; curva MQ ſemper ἀσυμπτώτους habebit & quidem *duas*; ſiquidem crus KN, dicta lege motum, curvas datas bis tangere poteſt. (*Confer. n. 2.*)

29. Cor. 4. Si in locum curvæ LF ſubſtituatur *datum punctum F*, quem caſum in ſeqq. unice conſiderabimus (*), determinabuntur Curvæ MQ *aſymptoti* (§. 28. n. 4. 5.) ducendo ex F rectas curvam ANR tangentes; tunc rectæ, quæ ad puncta contactus cum tangentibus ad easdem partes efficiunt angulos dato æquales, aſymptotorum poſitionem dabunt. Quæſtio autem: an & ubi *curva MQ datam AR tangat?* (§. 28. n. 3) redit ad problema de inveniendo in AR puncto O, ad quod ducta recta FO efficiat cum tangente in O angulum datum. Si OAR fuerit *Circulus*, (*Fig. 7. 8.*) cujus centrum C; deſcribatur per C, F alius circulus ſic, ut ſegmentum ejus ſuper recta CF (**) capiat

(*) Problema de determinanda Curva MQ, ſi fuerit *F punctum datum* &c. (vid. §. ſeq.), generaliter nobis ſolvendum propoſuit, literis ad nos datis, Amicus quidam honoratiſſimus.

(**) Poſito F *extra* circulum OR, ſegmentum hoc conſtituetur ad partem *eandem* ipſius CF, ad quam cadit crus alterum ang. dati, uno ſuper CF cadente; ſin *intra*, ad *oppoſitam*.

piat angulum $=$ complemento dati; hic circulus secabit vel tanget ipsum OR in punctis vel puncto O contactus curvæ MQ & circuli dati OR. Quando F *extra* Circulum OAR collocatur; puncta contactus adsunt *duo;* sin *intra*, vel *duo*, vel *unum* vel *nullum*, prout ratio sinus totius ad cosinum ang. dati fuerit $>$, $=$, $<$ CA : CF. Ita unicum datur, si e. g. $CF = \frac{1}{2} CA$ & ang. datus $60°$. (†)

PROBLEMA. *Fig. 5.*

30. *Data natura Curvæ ANR, in qua progrediatur vertex anguli dati KNZ, crure uno KN per datum punctum F traseunte; definire Curvæ MQ, quam perpetim tangat crus alterum NZ, naturam, relatione inter coordinatas ipsius orthogonales itidem exprimendam. Supponitur autem F situm esse in axe AX Curvæ datæ vel eodem producto, & tangentem in vertice A axi perpendicularem.* Sint coordinatæ $AP = x$, $PN = y$; $FA = a$, ang. dati sinus $= n$, cosinus $= m$, $1 =$ sinui toti. Facto ang. $FAB =$ dato KNZ & β FB normali ad AB, haud difficili conjectura colligitur, assumendam esse *B*β pro *axe* curvæ MQ & esse B ejus verticem; cum in genere oporteat esse (§. 25.) ang. $NFQ = TNZ$, (*Fig. 4.*) i. e. hoc in casu $AFB = 90° - FAB$, quare Q jam cadet in *B*. Sint itaque Curvæ MQ coordinatæ $BS = v$, $SQ = z$; P*p* NL ipsi Bβ normales, NE parallela.

D CASUS I.

(†) Singulorum, quæ hac continentur §:*pho*, demonstrationibus, facile inveniendis, ideo inprimis supersedemus, quod peculiaria schemata in earum usum essent adornanda.

Casus I. Curva AN *convexitatem* obvertat puncto F. Patet esse $PE = ny:m$ ideoque $FE = a + x - ny:m$ & ob $FE : LN :: 1 : m$, $LN = ma + mx - ny$. Patet quoque esse $NP : Lp :: 1 : m$, unde $Lp = my$; atque $Bp = nx$. Ergo $LS = v + nx + my$. Porro ang. $LFN + FNL =$ (recto $=$) $BFA + FAB$, quare ablatis $LFN + FNZ = LFN + FAB$, erit $ZNL = NFP$. Hinc $\triangle FPN \sim NLY \sim QSY$; ideoque $NP : PF :: LS : QS + NL = (v + nx + my)(a + x) : y$; unde subducta $NL = ma + mx - ny$, relinquitur SQ vel $z \overset{(A)}{=} (av + xv + nax + nx^2 + ny^2) : y$.

Porro ponamus tantisper $FN = r$, $FD = s$, $DN = t$, adeo ut (§. 25.) $NQ = r^2 . DG : st$ (*conf. Fig. 4.*). Quia vero $DG : t$ est sinus ang. DNZ seu $DNK + KNZ$, quorum sinus & cosinus sunt $s:r$, n, $t:r$, m respective; erit (*per El. Trig.*) $DG : t = (nt + ms) : r$; unde $NQ = mr + nrt : s$. Hinc ob FN (r) : FP $(a + x)$ :: NQ $(mr + nrt : s)$: QS + NL $[(v + nx + my)(a + x) : y]$; deducitur inde $(v + nx) s \overset{(1)}{=} nty$. Quærendi jam sunt valores literarum s, t. Ob $PT = ydx : dy$ & $\triangle FDT \sim NPT$, ideoque $FT = \dfrac{s\sqrt{(dx^2 + dy^2)}}{dy}$, erit $FT + TP = FP = a + x = \dfrac{ydx + s\sqrt{(dx^2 + dy^2)}}{dy}$, unde $s = \dfrac{(a + x)\, dy - ydx}{\sqrt{(dx^2 + dy^2)}}$. Hinc ob $r^2 = (a + x)^2 + yy$ & $t = \sqrt{(rr - ss)}$, fit $t = \dfrac{(a + x)\, dx + ydy}{\sqrt{(dx^2 + dy^2)}}$. His valoribus ipsarum s, t sub-

stitutis

ſtitutis in æq. (I), obtinetur æquatio $n\ \overline{(a+2x.}$ $\overline{ydx}+\overline{yy-xx-ax.}\ dy) \overset{(B)}{=} \overline{a+x.}\ vdy-vydx$. Ope harum æquationum ($A$, B) & tertiæ, naturam curvæ AN ſeu relationem inter x, y exhibentis, inveniri poterit nova, nullas præter v & z indeterminatas continens, ut ſelecta quædam exempla mox adferenda evidentius docebunt. *Q. e. f.* Cæterum quia æq. (B) etiam commodius & quidem independenter a §. 25 inveniri poteſt; en alios adhuc ad eam perveniendi modos:

Solut. 2. Æquationem (A) eadem, qua ſupra, ratione inveniendam, differentiando ſic, ut ponantur dv & $dz = o$, (quoniam dum x & y infinite parvo incremento vel decremento variantur, punctum Q, interſectione rectarum NZ nz infinite vicinarum definitum *Fig.* 4, concipitur non fluere; conſequenter nec fluunt QS, SB); ac dein multiplicando per y^2 & dividendo per dx; denuo prodit æquatio (B).

Solut. 3. Ob △ FPN ∽ QSY (*dem.*) & quia (*hyp.*) NQ tangit curvam MQ; eſt PN (y) : PF ($a+x$) :: (YS : SQ ::) $dv : dz$, unde $ydz \overset{(II)}{=} adv+xdv$. At æq. ($A$) $yz = av+xv+nax+nx^2+ny^2$ differentiata dat $ydz+zdy = adv+xdv+(v+na+2nx)dx+2nydy$; a qua ſi ſubtrahatur æq. (II), relinquitur $\overline{z-2ny.}$ $dy \overset{(C)}{=} \overline{na+2nx+v.}\ dx$.

Formulæ (A, C) adhiberi quidem poſſent ad

 eruen-

eruendam æquationem pro curva MQ; verum plerumque non æquè commode. Substituatur ergo in (C) pro z ejus valor ex (A) ut exsurgat nova, ex qua exulet z. Estque hæc ipsa æq. (B) ante inventa. Ad relationem inter v, z inveniendam, uti jam licet vel formulis (A, B) vel (B, C) prout visum fuerit; add. etiam infra §. 32. (E).

Casus II. Si curva data *concava* est versus F; reperiuntur hæ æquationes: (A') $yz = av - xv - nax + nx^2 + ny^2$; ($B'$) $n[(2x - a)ydx + (yy - xx + ax)dy] = (a - x)vdy + vydx$; ($C'$) $(z - 2ny)dy = (2nx - v - na)dx$, prioribus plane similes, nisi quod ipsarum x & dx locum teneant $-x$ & $-dx$.

31. Cor. 1. Ex æquat. (B vel B') fit $v \pm nx = ny.\dfrac{ydy \pm (a \pm x)dx}{(a \pm x)dy \mp ydx}$; unde nova hæc (*cfr.* §. 25.) fluit *Constructio 3:* Duc tangentem MT; quære ipsis PN, PT, PF quartam proportionalem ϕ, atque ipsis FT, PN, PN $\mp \phi$ quartam proportionalem Pζ. Invento sic puncto ζ, fac angulum FζQ = dato; recta ζQ determinabit, in NZ positione data, punctum Q Curvæ desideratæ. Nam FT $= a \pm x \mp ydx : dy$, &c. unde facile ostenditur n. Pζ seu pS $= v \pm nx$, ideoque BS $= v$. (Ubique, in $\pm$ $\mp$, signa superiora respondent casui I:mo, inferiora II:do).

32. Cor. 2. Si desiderentur ipsarum v & z valores per x, y, dx & dy exprimendi; habetur (§. 31.)

$$v \overset{(D)}{=} n\left(y\frac{ydy \pm (a \pm x)dx}{(a \pm x)dy \mp ydx} \mp x\right),$$ & substituto in

(A vel

(A vel A') hoc ipsius v valore, $z \overset{(E)}{=} n\left(y + (a \pm x) \dfrac{y dy \pm (a \pm x) dx}{(a \pm x) dy \mp y dx}\right)$.

33. *Exemplum 1.* Data NR non sit curva sed (*Fig. 6.*) *Linea Recta*, cui normalis esto FA $= a$, &c. Ob x jam $= 0$ ideoque & $dx = 0$; (A) mutatur in $yz = av + ny^2$ & (B) in $ny^2 = av$, aut si mavis (C) in $z = 2ny$. Ex binis quibuslibet harum æquationum facile deducitur $zz = 4nav$ æquatio ad *Parabolam*, cujus *parameter* (ad axem) $= 4na = 4FB$, axis EG ideoque *Focus F*. Ducta FO sic ut ang. AFO fiat $=$ AFB; ac proinde FOR $=$ dato FAB; patet rectam NR *Parabolam* hanc *MBQ tangere* in O.

34. *Exemplum 2. Fig. 7.* Esto ARXO *Circulus*, cujus centrum C, radius CA $= c$; jaceatque F *extra* circulum. Incedat I:mo ang. datus FAB super *convexa* peripheria OAP. Sint, compendii causa, $a + c = b =$ CF, $a + 2c = f =$ FX, unde quoque $b + c = f = 2b - a$. Æquatio circuli $y^2 \overset{(I)}{=} 2cx - xx$ differentiata dat $dy = (c - x) dx : y$. Substitutis jam $(c - x) dx : y$ pro dy, $2cx - xx$ pro y^2, b pro $a + c$ & f pro $2b - a$; æquatio (B) (§. 30.) hanc induit formam: $ncfx + bvx = acv$, unde $x \overset{(II)}{=} \dfrac{acv}{ncf + bv}$. Similiter ($A$) mutatur ope æquationis (I) in hanc: $y = [av + (nf + v)x] : z$; ubi pro x ponatur ejus valor (II), & fiet $y \overset{(III)}{=} \dfrac{afv}{z} \times \dfrac{2nc + v}{ncf + bv}$; vel ex æq. ($E$,

 §. 32.)

§. 32.) elicitur $z = \frac{nafy}{ac-bx}$, unde $y \overset{(IV)}{=} \left(z. \frac{ac-bx}{naf}\right.$ $=$ per II$\left.\right) \frac{ccz}{ncf+bv}$. Hos denique ipsarum y (III. vel IV.) & x (II) valores inserendo æquationi datæ (I) & rursus ponendo f pro $2b-a$; aut si mavis binos illos (III. IV.) ipsius y valores æquando, obtinetur $zz - \frac{af}{cc} v^2 - \frac{2naf}{c} v = 0$ æquatio ad *Hyperbolam* HBL, habentem *centrum* K, ubi normalis ex centro C circuli occurrit FB productæ; *semiaxem* transversum KB, *Focum* F. Progrediatur jam II:do idem ang. FNZ=FAB, incedendo in *concava* peripheria ORXN; dico genitum iri *Hyperbolam* MOQY priori *oppositam*, cujus focus f, sumta scil. in FB producta, Kf=KF, &c. Nam, junge Cf, fr & produc fr ad E; ob ang. FCf= 2N, erit arcus AP=Sr, unde Pr=AS. Hinc, & ob Cf=CF, sequitur esse ang. Pfr=AFS indeque rursus FCf seu 2N= (FEf=) N+NrE. Ergo NrE seu $frZ=N=FAB$. Curva igitur MOQY est illa ipsa, quam crus rZ anguli frZ=FNZ vel FAB dato, perpetuò tangeret, altero crure rf per punctum f semper transeunte & vertice r super convexa peripheria OPA incedente; i. e. (*per n. I.*) *Hyperbola* a priori HBOL nonnisi situ diversa (ob Cf=CF &c.) & cum ipsa centrum K, focos F, f & axem communia habens. Dum itaque angulus FAB circulum integrum motu suo absolvit, *Hyper-*

bolæ

bolæ oppositæ generantur. *Tangent* vero eædem semper circulum in punctis OO, de quibus definiendis supra (§. 29.) mentio facta. *Asymptoti* etiam ex generatim (§. *cit.*) dictis facile inveniuntur. Si distantia CF puncti F a centro circuli, fuerit ad radium, ut diagonalis quadrati ad latus; *Hyperbolæ* erunt *æquilateræ*.

35. *Exempl. 3. Fig 8.* Posito autem F *intra circulum* dictisque $CF = e = c - a$ vel $a - c$, & $FX = g = 2c - a = a \pm 2e = c \pm e$; reperietur ut in §. *præc.* sed ope æquationum (B', A' §. 30. vel E §. 32.) $x = \frac{acv}{ncg \mp ev}$ & $y = \frac{agv}{z} \cdot \frac{2nc - v}{ncg \mp ev}$ vel $= \frac{ccz}{ncg \mp ev}$; atque hinc tandem, occupante g locum ipsius $a \pm 2e$, $zz + \frac{ag}{cc} v^2 - \frac{2nag}{c} v = 0$ æquatio ad *Ellipsin.* Demissis scil. iterum ex C & A ad GB (efficientem cum circuli diametro AX angulum = complemento dati) perpendiculis CK, AB; erit K *centrum*, KB *semiaxis major*, F *Focus* Ellipseos hujus BLO. Fieri potest ut Ellipsis circulum in uno vel duobus punctis OO contingat; quæ quomodo determinentur vid. supr. §. 29. Si, manentibus cæteris, puncta FF utrinque æqualiter a centro C distant, manifestum est ellipses, utroque in casu genitas, non nisi positu differre, & ad diversas diametri circuli AX partes, similem prorsus situm habere. Si F in ipsum C inciderit, Ellipsis in *Circulum* degenerat dato concentricum, cujus radius $= nb$; id quod etiam, absque ope solutionis generalis aut calculi ullius,

ullius, per se patet. Quod si autem F situm est in ipsa circuli dati peripheria, seu $a=2c$ vel $=0$; *curva*, de qua quæritur, datur *nulla*, sed evanescit eadem in unicum quoddam ejusdem peripheriæ *punctum*, ut ex *Eucl. III. 26.* quoque constat.

36. Cor. 1. Universaliter igitur verum est (§§. 33. 34. 35.): Si linea data vel *Recta* fuerit vel *Circulus*; curvam (§. 30.) quæsitam fore *Sectionem* aliquam *Conicam*, cujus *Focum* occupat punctum datum, *Axis* autem ad diametrum circuli se habet ut sinus anguli dati ad sinum totum, atque ad eandem (per punctum illud datum transeuntem) inclinatur sub angulo = complemento dati. Quando ang. datus *Rectus* est, axis & centrum Sectionis diametro & centro circuli congruunt.

37. Cor. 2. Vicissim ergo patet: ductis e *foco Sectionis Conicæ*, ad tangentes ejus innumeras, totidem rectis in angulo quocunque constante (versus eandem scil. partem); locum omnium punctorum, sic in tangentibus determinatorum, fore aut *Lineam rectam*, si Sectio fuerit *Parabola*, aut *Circulum*, si *Ellipsis* vel *Hyperbola* vel *Circulus*.

38. *Exempl. 4. Fig. 9.* Incedat ang. datus FMZ in *Parabola* PAMR, crure FM per *Focum* F parabolæ semper transeunte. Duc ML facientem cum axe AX angulum $MLF = FMZ$; MN parallelam axi & MC normalem in parabolæ puncto M. Est itaque LMN = (FLM =) FMZ; quare $ZMN = FML$. Ast (*per propr. Parabolæ*) $CMN = CMF$. Ergo $CMZ = CML$.

$=CML$. Unde sequitur: *Curvam quæsitam, quam crus MZ anguli dati continuè tangit, eandem esse, quæ Caustica Parabolica per reflexionem, dum radii incidentes paralleli sunt inter se &* (ipsi LM, i. e.) *cum axe parabolæ efficiunt angulum dato FMZ æqualem.* Ut obtineatur æquatio ad hanc curvam, notandum: quia in formulis nostris (§. 30) ponitur $FA=a$, æquationem parabolæ esse $yy=4ax$, unde $dy=2adx:y$. Facta horum valorum substitutione in æquationibus (A', B'), hæc dabit $v=3nx$; illa autem, ponendo rursus $v:3n$ pro x, $y=2v.\dfrac{9na-v}{9nz}$, $\left(\text{aut vero } C' \text{ dat } y=\dfrac{6az}{9na-v}.\right)$ Hos jam ipsarum x, y, valores inserendo æquationi $yy=4ax$, vel comparando binos illos ipsius y valores, reperitur $zz=\dfrac{v^3}{27na}-\frac{2}{3}v^2+3nav$ æquatio ad curvam desideratam s. *Catacausticam Parabolicam*; ubi parabolæ genetricis parameter $=4a$. Facto angulo $XFO=$ duplo dati, erit O punctum in quo *parabola* ejusque *Catacaustica* se *tangunt*. Ducta enim recta OT parabolam tangente; ob ang. $FOT=FTO$ (*per propr. parabolæ*), erit $FOT=$ ($\frac{1}{2}XFO=$) dato. Ergo &c. (§. 29.).

39. *Exempl.* 5. *Fig* 10. Sit ANR *Spiralis Logarithmica*, per cujus *centrum* ipsum F transeat crus FN anguli dati FNZ. Ducta DNT Spiralem tangente, fac ang. $NFQ=TNZ$; eritque (§. 25.) Q punctum curvæ LQS quæsitæ. Hinc, ob $NFQ+$

FQN = (2 rectis —FNZ =) TNZ + FND, erit *FQN = FND*; qui FND cum sit constans (*per nat. Logisticæ Spiralis*), & (*hyp*) NZ tangat curvam LQS; sequitur LQS etiam esse *Spiralem Logarithmicam specifice eandem*, quæ est ANR data, & *commune* cum illa *centrum* F habentem; qualiscunque fuerit angulus datus.

40. Cor. 1. Nimirum si ang. *FNZ = FND* sub quo Spiralis ANR secat suas ordinatas; ob ang. FNQ = FQN, erit *FQ = FN*, adeo ut puncta Q N similiter in suis Spiralibus posita sint, seu vertex N anguli FNZ atque crus NZ similes vel *easdem* potius *partes Spiralium* ANR LQS, inter se prorsus *earundem*, nec nisi situ differentium, simul emetiantur. Divergunt scil. Spirales illæ sub angulo NFQ, & si circa F revolvatur Spiralis LQS usque dum FQ in FN ceciderit; congruent ipsæ Spirales. Sin FNZ >, < FND, diversæ & inæquales erunt portiones Spiralium, inter se tamen non differentium, simul emensæ. Cæterum data Spirali ANR datoque ang. FNZ, △ FNQ specie datum est.

41. Cor. 2. Quando ang. *FNZ* = est complemento ipsius FND; erit (ob DNZ tunc rectum) *NZ* normalis Spirali in N, consequenter *NQ Radius Curvaturæ* & *LQS Evoluta* Spiralis. At si *FNZ* = duplo complemento ipsius FND, ut, ducta NC normali, sit *CNZ = CNF*; lumen ex *F* in *N* illapsum reflectetur secundum *NZ* eritque *LQS Catacaustica*. Posito denique FN radio incidente & Nz refracto, retror-

retrorsum continuato; ob datum FND ideoque FNC angulum incidentiæ, datus est (*ex lege refractionis*) ang. refractionis CNz, consequenter & *FNz*; qui igitur in ANR incedens, crure Nz tanget *Diacausticam*. Vel sic ergo, facillimo scil. ratiocinio Geometrico & absque calculo ullo (*cfr.* §. 25. *Constr.* 2.) & quidem ex unico principio (§. 39.) generali, constat *Spiralis Logarithmicæ Evolutam* ut & *Causticas* per *reflexionem* ac *refractionem*, posito umbilico *F* puncto radiante, esse etiam *Spirales Logarithmicas* a proposita non nisi situ diversas & circa commune centrum descriptas.

PROBLEMA. *Fig.* 11. 12.

42. *Sint duæ Curvæ DMG LNK, & a quolibet illius puncto M in hanc ducta normalis MN habeat, ad curvæ DMG applicatam MP, rationem datam b:a; data harum curvarum una, invenire alteram* sive (Cas I. *Fig.* 11.) applicatæ MP perpendiculariter insistant axi AP curvæ DG, sive (Cas. II. *Fig.* 12.) e puncto fixo P prodeant.

I:mo Detur curva DG. Duc tangentem MT occurrentem in T vel (Cas. I.) axi dato AP, vel (Cas. II.) rectæ alii PT positus variabilis, ad PM normali. Sunto *mp* vel *mP* ordinata & *mn* normalis, ipsis MP MN infinite vicinæ; *mr mM mS* ipsarum MP DM MN fluxiones respective atque NO ipsi MT perpendicularis. Jam quia (*hyp.*) MP MN constantem servant rationem, eandem quoque servabunt simultaneæ earum fluxiones, scil. $mr : mS :: MP : MN$. Rursus ob $\triangle\, MSm \backsim NOM$ & $Mrm \backsim TPM$, est $mS : mM :: MO : MN$ & $mM : mr :: MT : MP$; unde sequitur $\div\, MT, MN, MO$. Hinc fluit *Curvæ LK Constructio:* Super MT describe semicirculum, in quo aptetur $MN = b . MP : a$, erit N punctum in Curva LK. Si oportet esse $MN = MP$, patet etiam inveniri N, vel demissam ex P in MT perpendicularem producendo in duplam sui longitudinem ad N; vel centris M, T, radiis MP TP describendo arcus, quorum intersectio dabit N; vel denique faciendo ang. $TMN = TMP$ & $MN = MP$. Hæ constructiones speciales facillime sic quoque eliciuntur: quia in hoc casu puncta PN haberi possunt pro intersectionibus circulorum centris M, m, radiis MN, mn descriptorum, quare juncta recta PN est chorda his circulis communis; sequitur (*ex El. Geom.*) rectam per centra M m transeuntem i. e. tangentem MT bisecare ad angulos rectos ipsam PN, ut & angulum PMN, quare etiam, juncta NT, est $\triangle\, MNT = \triangle\, MPT$. Ex generali autem constructione etiam sequitur, *NT tangere curvam LK* in N, quia ang. MNT in semicirculo rectus est & MN curvæ LK normalis.

II:do Dentur curva LK & vel (Cas. I.) alterius DG axis AP positione, vel (Cas. II.) punctum P. Quia, sumta TM pro sinu toto, MN MP sunt sinus angulorum MTN, MTP; mox se offert in Casu I. *Curvæ DMG Constructio:* Duc NT, quæ

tangat

tangat LK in puncto quocunque N, & occurrat axi AP in T; ſeca angulum PTN ſic (*conf.* §. 15. *Conſtr.* 1.) ut partium MTP MTN ſinus ſint in ratione illa data $a:b$; recta TM occurret ipſi NM, ad TN normali, in puncto *M* curvæ quæſitæ *DG*. In Casu II. ſimiliter duc indefinitam NM normalem curvæ LK; deſcribe circulum talem (vid. ſis *Newt. Arithm. Univ. p. m.* 135. *Hôpit. Tr. Anal. des Sect Con.* §. 350. vel *Anal. des inf. pet.* §. 142.) ut rectarum, ad quodlibet peripheriæ punctum ex P & N ductarum, ſit ratio conſtans $a:b$; punctum *M* interſectionis hujus circuli & rectæ NM, erit in curva *DG*. Si $a=b$; biſeca PN recta perpendiculari, quæ occurret ipſi NM in *M*.

43. Cor. 1.) Curvæ *DG LK* ambæ ſimul ſunt vel *Algebraicæ* vel *Traſcendentes*. 2) Si fuerit MP : MT :: $a:b$, erit T punctum, in quo curva LK axi AP occurrit. Aſt ſi 3) MP : MT $>a:b$, hypotheſis impoſſibilis eſt; ſcil. non datur ullum curvæ LK punctum N, ipſi M reſpondens ac quæſtioni ſatisfaciens. 4) Sumta AP pro axe communi harum curvarum, eſt PT ſubtangens unius DG, & TN tangens alterius LK, ad puncta MN correſpondentia. Atque ſi *MP* $>$, $=$, $<$ *MN*, erit *PT* $<$, $=$, $>$ *TN*.

44. *Exempl.* 1. *Fig.* 13. Eſto Curva ADMG *Circulus*, cujus centrum C; & *MN*$=$*MP*. Produc CM TN ad occurſum in B. Quia jam TM ipſi CB perpendicularis, erit, ob angulos ad T æqua-

les (§. 42,) $MB = MC$ constanti. Describatur diametro MB circulus, qui, ob ang. MNB rectum, per N transsibit. Porro quam habent angulorum TBM TCM æqualium sinus $\frac{1}{2}$MN MP, in circulis MNB AMG, rationem, scil. $1:2$, eandem habebunt arcus $\frac{1}{2}$MN MA sinubus istis respondentes; quare arc. $MN =$ arc. MA. Ergo Curva ALNK erit *Epicyclois*, quam puncto N peripheriæ suæ describit circulus genitor MNB, super dato circulo AMG volvendus & radium habens $= \frac{1}{2}$ radio immobilis; estque origo hujus Epicycloidis in A, vertex in K, posito scil. ang. ACK recto & GK = GC.

45. *Exempl. 2.* Esto DG (*Fig. 11.*) *Logarithmica* vulgaris, cujus *asymptotos* PA, & oporteat esse $MN = MP$. Est itaque (§. 43. *n.* 4.) curvæ *LK tangens* $NT = PT$ subtangenti Logarithmicæ, adeoque *constans*. Quare curva *LK* erit *Tractoria*, quam describit punctum N, dum super plano progreditur, uno suo termino T incedens in recta AP positione data, (in ipsam AP non cadens) recta TN longitudinis datæ $= PT$, v. g. filum tensum, cujus alterum extremum N plano isti apprimitur quacunque vi, præterea nil agente, e. g. pondere super plano horizontali. Vel ex illa (§. 42. n. 1.) *Tractoriæ* hujus *constructione*, ope *Logarithmicæ* perficienda, liquet, esse huic *Tractoriæ Asymptotum AP* cum Logistica communem. Nam crescente in infinitum PM, pariter (ob PT constantem) crescit ang. PTM ejusque duplus PTN; quare ang. NTR

ideo-

ideoque (ob NT constantem) etiam Tractoriæ ordinata *NR* in infinitum minuitur; nec tamen unquam evanescit, quia semper MP seu MN < MT. Quando Logarithmicæ ordinata MP = est subtangenti *PT*, ipsi AP in T normaliter insistit Tractoriæ tangens ejusque applicatam maximam constituit; id quod ex eadem constr. (§. 42.) itidem manifestum.

46. *Exempl. 3.* Sit (*Fig. 14. 15. 16. coll. Fig. 12.*) *DG Sectio Conica* quæcunque *Focum* habens *P*; & oporteat esse *MN* = *MP*; quare, si MT Sectionem tangit, erit (§. 42.) ang. *TMN* = *TMP*. Ergo (*per propr. Sect. Con.*) MN aut convergunt ad aliud punctum fixum, quod sit *C*, *Focum* scil. Sectionis alterum; aut, si sectio fuerit Parabola, axi parallelæ erunt. Jam in *Ellipsi* (*Fig. 14.*) CM + MP & in *Hyperbola* (*Fig. 15.*) CM — MP, i. e. utrobique *CN* = axi transverso, ideoque constans. Ergo locus omnium punctorum N seu curva *LK* erit *Circulus*, cujus *centrum* est alter Sectionis *Focus*, *radius* autem *axis*, quem diximus, ejusdem. Ast si DG fuerit *Parabola* (*Fig. 16.*) patet *LNK* esse *lineam rectam* axi perpendicularem, ipsam scil. parabolæ *Directricem* Si *DG* fuerit *Circulus*, P ejus *centrum*, & *PM* : *MN* ratio quæcunque data; sponte patet *LK* etiam fore *Circulum* priori concentricum & radio = PM + MN descriptum. Cæterum hæc omnia, synthetice proposita, per se nota sunt.

47. *Exempl. 4.* (*Fig. 12.*) Sit *DG Spiralis Logarithmi-*

rithmica, cujus centrum *P*, *PM* : *MN* ratio quæcunque data. Ob angulos MPT, MNT rectos, erunt MNTP puncta in circulo; quare, juncta PN, ang. *PNT* = *PMT* constanti (*per propr. Spir. Log.*). Ergo curva *LNK* denuo est *Spiralis Logarithmica specie eadem*, quæ DG, idemque *centrum P* sed situm tantummodo diversum habens.

48. Schol. Ex constructionibus (§. 42.) eliciuntur formulæ generales, quarum ope, data æquatione ad unam curvarum DMG LNK, invenietur æquatio ad alteram; cujusmodi formulas etiam pro Casu I:mo investigavimus. His vero jam immorari non vacat. Cæterum facile intelligitur, si curva DG ejus fuerit indolis (e. g. Circulus vel Ellipsis cfr. *Fig.* 13.) ut a recta quadam CK ad AP normali in duas partes æquales ac similes similiterque respectu ipsius CK positas dividatur; pro axe curvæ LK sumendam esse non AP, quod minus commodum foret, sed ipsam CK. Coronidem huic fasciculo jam imposituri, nonnullas iterum subjungemus

THESES.

1. Quæ sub lineis rectis, e quibuslibet peripheriæ Circuli punctis ad data duo ejusdem puncta ductis, continentur Rectangula, inter se sunt ut punctorum *illorum* distantiæ a recta, per *hæc* duo transeunte.

2. Recta

2. Recta CI, angulum ACG Δ:li ACG utcunque secans, basin AG ita secat, ut baseos segmenta AI IG sint in ratione composita reliquorum laterum CA CG, atque sinuum angulorum partialium ACI GCI adjacentium. *Fig. 3.*

3. Dodecagonum regulare sesquialterum est Quadrati eidem circulo inscripti, & æquale triplo quadrato radii, vel quadrato, quod fit ex recta, quatvor Dodecagoni latera subtendente; atque ad aream circuli circumscripti eam habet rationem, quam perimeter Hexagoni ad peripheriam circuli.

4. Quando angulus comprehensus a diametro & normali, per idem Ellipseos punctum transeuntibus, maximus est; sinus totus ad anguli illius tangentem se habet, ut duplum rectangulum sub axibus ad rectangulum sub summa & differentia eorundem seu quadratum distantiæ focorum (cfr. *Fascicul. I.* §. 28.). Aut vero ut axium summa ad eorum differentiam, ita sinus totus ad tangentem dimidii istius anguli.

5. In Figura qualibet rectilinea, semisumma omnium laterum singulis lateribus major est; unde judicari potest, utrum figura ex datis rectis constructu sit possibilis.

6. Possunt ex datis rectis, pluribus quam tribus, Figuræ æquales at dissimiles tamen construi. Et quidem datæ rectæ, si omnes inter se fuerint inæquales, comprehendere possunt Trapezia tria, Pentagona XII, Hexagona LX, &c. diversa; atque in genere, posito laterum numero n, possibi-

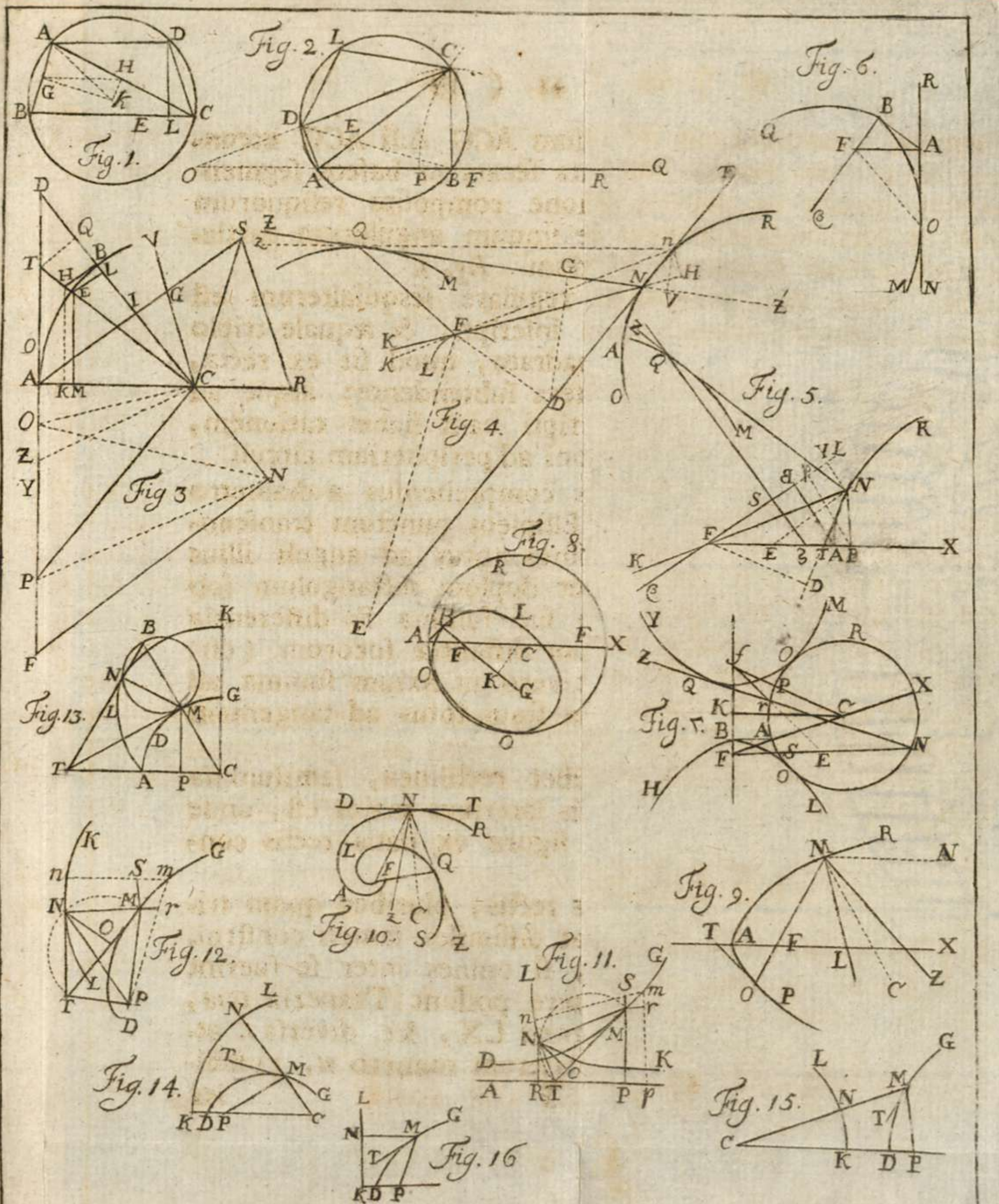
Fig. 1.
Fig. 2.
Fig 3
Fig. 4.
Fig. 5.
Fig. 6.
Fig. 7.
Fig. 8
Fig. 9.
Fig. 10.
Fig. 11.
Fig. 12.
Fig. 13.
Fig. 14.
Fig. 15.
Fig. 16

I. H. S. Sc. Aboæ

les sunt figuræ numero $(n-1)(n-2)\cdots 3$, sibi mutuo æquilateræ & æquales, simul tamen dissimiles.

7. Circulus RAOX (*Fig.* 8. *coll.* §§. 29. 35.) Ellipsin LBO, in puncto contactus O, si hoc unicum fuerit, osculatur. Sin duo fuerint puncta contactus, in his radius curvaturæ Ellipseos radio circuli minor est.

8. Si in Curva, quæ *Lemniscata* dici svevit & cujus natura hac æquatione $(xx+yy)^2 = aa(xx-yy)$ exprimitur (positis semiaxe $= a$ & abscissarum x origine in centro s. nodo curvæ), ita incedit angulus rectus, ut crus unum per centrum transeat; curvæ, quas continue tangit crus alterum, erunt *Hyperbolæ æquilateræ oppositæ*, idem, quod Lemniscata, centrum eundemque axem habentes.

9. Male *Wolfius*, in *Elem. Analys. P. I.* §. 577, *Epicycloides* sine discrimine omnes in numerum curvarum Transcendentium refert. Et ipse quidem huic adserto suo, re magis quam verbis, contradicit in *Elem. Mechan.* §§. 371 -- 373.

10. In omni *Sectione Conica DMG*, sinus angulorum *PMT*, quos efficiunt rectæ, e foco *P* ductæ, cum curva vel cum tangentibus ad puncta contactus, sunt in ratione subtriplicata inversa radiorum curvaturæ in iisdem punctis *M*. *Fig.* 14. 15. 16.

SOLI DEO GLORIA!